ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА ДО ДРУГОГО ВИДАННЯ

Інтенсивне вивчення матричних многочленів та їх факторизацій розпочалося в середині 20-го століття у зв'язку із застосуваннями в різних галузях математики та в прикладних задачах. На основі встановленої у 40-их роках минулого століття узагальненої теореми Безу для матричних многочленів розв'язування матричних многочленних рівнянь стало частиною проблеми факторизації матричних многочленів. Відтоді у цьому напрямку у провідних виданнях публікується багато статей вітчизняних та зарубіжних авторів. За відсутності загальної теорії автори розв'язували ту чи іншу задачу окремими способами в залежності від її специфіки. У 1966 р. вийшла з друку книга П. Ланкастера [42], один з розділів якої присвячений розкладності на множники простої структури, що не мають спільних характеристичних коренів, матричних многочленів низьких степенів.

Опублікована у 1981 р. монографія П.С. Казімірського “Розклад матричних многочленів на множники“ стала першою книгою, в якій побудована теорія розкладності на множники матричних многочленів над полем комплексних чисел або, більш загально, над алгебраїчно замкненими полями характеристики нуль. На основі введених автором нових понять значення поліноміальної матриці на системі коренів многочлена та визначальної матриці розроблено метод розкладності матричних многочленів на множники. Це дозволило цому розв’язати відому проблему виділення регулярних множників із таких матричних многочленів.

Незважаючи на те, що після опублікування першого видання книги П.С. Казімірського пройшло більше тридцяти років, її результати, методи та ідеї використовуються і сьогодні, зокрема, для побудови теорії факторизації матриць над поліноміальними та іншими кільцями.

Введене поняття напівскалярної еквівалентності многочленних матриць і встановлена відносно цієї еквівалентності трикутна форма матриць та їх скінченних наборів зіграли важливу роль у побудові теорії розкладності матричних многочленів на множники. Ця форма пізніше була поширена для многочленних матриць над довільним полем [69], встановлена так звана стандартна форма пар матриць над певними кільцями відносно введеної узагальненої еквівалентності [78] і використано їх підчас розробки методів факторизації матриць над цими кільцями [70, 71].

Визначальна матриця, введена у монографії, стала основою при описанні факторизацій симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією [67, 68] та побудові методу факторизації матриць над комутативними областями елементарних дільників [76, 79].

Крім застосувань напівскалярної еквівалентності многочленних матриць у теорії факторизації матриць, вона використовується і в інших задачах. Як виявилося, задача напівскалярної еквівалентності многочленних матриць містить відому проблему подібності пар та скінченних наборів числових матриць, тому напівскалярну еквівалентність матриць в окремих випадках вдалося застосувати до дослідження подібності пар матриць [72, 73, 74], а також для розв'язування певних типів матричних рівнянь [66, 75].

У цьому виданні монографії виправлено виявлені описки і неточності та додано у списку літератури джерела [66–79].

Оскільки перше видання цієї книги тепер є рідкістю, то нове її видання стане доступним і буде корисним для теперішніх науковців та аспірантів і студентів університетів.

ВСТУП

Ця книга присвячена питанням розкладності матричних многочленів на множники.

Ми розглядаємо кільце квадратних матриць порядку n з елементами із кільця многочленів змінної x (як правило, з комплексними коефіцієнтами). У цьому кільці природно виділяється півгрупа тих поліноміальних матриць, які при зображенні у вигляді матричного многочлена

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m \tag{0.1}$$

мають своїми старшими коефіцієнтами неособливі матриці A_0. Такі поліноміальні матриці називаються регулярними.

Істотна увага в книзі приділена питанню розкладу на множники в півгрупі регулярних матриць. Однак при проведенні досліджень, а також у питаннях застосувань доцільно розглядати матричні розклади за межами цієї півгрупи. З другого боку, в питаннях подільності замість регулярних матриць можна, як правило, обмежитись розглядом унітальних поліноміальних матриць (у яких коефіцієнт A_0 – одинична матриця).

Поліноміальна матриця, записана у вигляді (0.1), називається також матричним многочленом.

Мета нашого дослідження – пошук умов, за яких матричний многочлен (0.1) може бути зображений у вигляді

$$A(x) = B(x)C(x), \tag{0.2}$$

де $B(x)$, $C(x)$ – матричні многочлени степеня, меншого m.

У такому загальному формулюванні ця задача містить, зокрема, проблему (що виникла в теорії систем диференціальних рівнянь), поставлену Я.Б. Лопатинським, яка полягає в тому, щоб знайти умови, за яких регулярний матричний многочлен $A(x)$ може бути зображений у вигляді добутку регулярних матричних многочленів нижчих степенів.

Важливим є також питання про розклад многочлена $A(x)$ на лінійні множники, тобто про існування і знаходження розкладу

$$A(x) = A_0(Ex - B_1)\dots(Ex - B_m)\,. \qquad (0.3)$$

Оскільки виділення лівого лінійного унітального множника з матричного многочлена (0.1) рівнозначне рішенню матричного рівняння

$$X^m A_0 + X^{m-1} A_1 + \cdots + X A_{m-1} + A_m = 0\,, \qquad (0.4)$$

де X – невідома матриця, то теорія матричного рівняння (0.4) є частиною тих питань, які розглядаються[1].

Визначник $\Delta(x) = \det A(x)$ ми називаємо характеристичним многочленом поліноміальної матриці $A(x)$. Переходячи в рівності (0.2) до визначників, одержуємо рівність

$$\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x)\,. \qquad (0.5)$$

Розклад (0.2) ми називаємо паралельним розкладові (0.5). Пошук розкладів (0.2) можна, таким чином, розчленувати на частини і намагатись знайти лише ті розклади, які відповідають фіксованому розкладові (0.5). Очевидно, що для деяких розкладів (0.5) паралельних розкладів (0.2) з регулярним множником $B(x)$ може і не бути.

[1] Задача виділення лінійного унітального множника з матричного квадратичного пучка була поставлена М.Г. Крейном у середині 50-х років

Подамо короткий зміст книги наступним оглядом її розділів.

У розділі 1 досліджується питання виділення лінійного унітального множника простої структури з поліноміальної матриці. Доведено, що унітальний матричний многочлен простої структури (елементарні дільники якого лінійні) розкладається в добуток унітальних лінійних множників. Доведено існування регулярних матричних многочленів довільного степеня, для яких існують розклади (0.2) з лінійним унітальним $B(x)$, паралельні довільному поліноміальному розкладові (0.5) ($\deg \varphi = n$).

Розділ 2 присвячений проблемі розкладності регулярного матричного многочлена в добуток лінійних регулярних множників. У цьому зв'язку досліджується питання виділення лінійного унітального множника з неособливої поліноміальної матриці. Відтак досліджується можливість зображення матричного многочлена (0.1) у вигляді (0.3) при тих чи інших обмеженнях.

У розділі 3 досліджується питання про виділення регулярного множника з матричного многочлена. Розглядаються розклади (0.2) матричних многочленів на множники, які мають властивість: для кожного спільного кореня α характеристичних многочленів $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ матриця $A(x)$ має лише один елементарний дільник, що відповідає цьому кореневі, тобто $\operatorname{rang} A(\alpha) = n - 1$. Для таких розкладів будується повна теорія. Формулюються необхідні і достатні умови існування розкладів. Доведено теореми єдиності розкладів (в належному сенсі). Вказано методи для фактичної побудови розкладів.

Зокрема, побудована теорія розкладності на множники для поліноміальних матриць, що мають взаємно прості елементарні дільники. Доведено, що кожна така матриця має лише скінчене число унітальних дільників, що ефективно визначаються. Як наслідок цього встановлено, що рівняння (0.4) має лише скінченну кількість розв'язків і всі вони можуть бути ефективно знайдені, якщо тільки елементарні дільники характеристичної матраці (0.1) рівняння (0.4) попарно взаємно прості.

У розділі 4 висвітлюється теорія, яка, зокрема, дала можливість розв'язати проблему виділення регулярного множника з неособливого матричного многочлена, тобто сформулювати необхідні і достатні умови, що конструктивно перевіряються, існування розкладів (0.2), де $B(x)$ – регулярний матричний многочлен, і вказати ефективні методи для фактичної їх побудови.

Вивченню розкладів вигляду (0.2), в яких матриця $B(x)$ є клітково-діагональною матрицею вигляду

$$\begin{Vmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F(x) \end{Vmatrix}$$

з унітальним $F(x)$, присвячений 5 розділ.

Одержані при цьому результати дозволили відповісти на питання про можливість одночасного зведення скінченого набору числових матриць перетворенням подібності до квазітрикутного і (при досить сильних обмеженнях) квазідіагонального виглядів.

Викладені в книзі результати і розроблені методи можуть бути, зокрема, застосовані в теорії диференціальних рівнянь і, мабуть, зможуть знайти своє відображення в теорії поліноміальних операторних пучків, вивчення спектральних властивостей яких ведеться останнім часом (див. [25, 29, 30]).

Зауваження. Все, що зроблено у монографії, правильно для довільного алгебраїчно замкненого поля $\mathbf{F}$ нульової характеристики. Більше того, якщо $\Delta(x) = \det A(x)$, де $A(x)$ – поліноміальна матриця, що розглядається, розкладом якої на множники ми цікавимося, то всі викладки і формулювання теорем, що відносяться до матриці $A(x)$, правильні для поля, в якому $\Delta(x)$

розкладається на лінійні множники. Проте для простоти викладу ми домовимося вважати, що основне поле – це поле всіх комплексних чисел. Правда, в окремих випадках одержані результати правильні у випадку довільного поля, (в якому $\Delta(x)$ не обов'язково розкладається на лінійні множники (див. 3.4)). В цих і деяких інших ситуаціях (див. 1.3, 2.10, 4.3) ми будемо спеціально робити застереження, що основне поле є більш загальне або довільне. Говорячи про многочлен, скрізь (якщо нема застереження), ми маємо на увазі многочлен над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$.

Автор висловлює глибоку вдячність Д.О. Супруненкові, який прочитав рукопис і зробив ряд цінних порад, а також З. І. Боревичу за ряд цінних зауважень.